

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д. физ.-мат. н., проф., ХНТУСХ, Харьков;
С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, к. физ.-мат. н., доц., НТУ "ХПИ"

ПЕРЕХОД ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС В ОСЦИЛЛЯТОРЕ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Показано, что в осцилляторе переменной массы могут возникнуть резонансные колебания даже при действии внешней силы постоянной амплитуды и частоты. Исследованы особенности такого резонанса.

Ключевые слова: резонанс, осциллятор, переход через резонанс, нестационарные колебания, переменная масса

Введение. В теории нестационарных механических колебаний давно решены задачи прохождения через резонанс системы с одной степенью свободы при действии возмущающей силы переменной частоты, а также переменных во времени частоты и амплитуды. Фундаментальными публикациями в этом направлении, с соответствующими обзорами по проблеме, являются [1-4], где результаты обобщены и на нелинейные системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы. В упомянутых книгах изложены также решения задач параметрического резонанса, которые сводятся к уравнениям движения с периодическими коэффициентами типа Матье-Хилла. Менее изученными остаются вопросы прохождения через параметрический резонанс осциллятора монотонно переменной массы или жесткости, которые в очень сжатой форме обсуждались в [5]. В отличие от осциллятора постоянных параметров, вследствие монотонного изменения массы или жесткости, в системе переменных параметров возможно возникновение нестационарных резонансных колебаний и при действии внешней возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды. На описание такого резонанса ориентировано содержание этой статьи.

© В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский, 2014

Целью работы является исследование прохождения через резонанс осциллятора линейно-переменной массы при действии возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды.

Основная часть работы. Задачу колебаний решаем без учета сопротивления среды, что приводит к завышенным значениям коэффициента динамичности [3]. Исходным принимаем уравнение движения:

$$m_0(1 + \gamma t) \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = F \sin(\omega t), \quad (1)$$

которое введением новой переменной $\xi = (1 + \gamma t)$ преобразуем к форме:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \frac{x}{\xi} = \frac{F}{m_0 \gamma^2 \xi} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (\xi - 1) \right]. \quad (2)$$

В (1), (2) $\omega_0 = \sqrt{c/m_0}$; x – линейное перемещение осциллятора; $m_0(1 + \gamma t)$ – масса осциллятора, которая меняется с течением времени t по линейному закону; $m_0 \gamma$ – скорость изменения массы во времени; c – коэффициент жесткости пружины; F, ω – амплитуда и частота возмущающей силы.

Полагая в (2) $F = 0$, получаем однородное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \frac{x}{\xi} = 0. \quad (3)$$

Фундаментальными решениями (3) являются:

$$x_1 = \eta J_1(\eta); \quad x_2 = \eta Y_1(\eta), \quad (4)$$

где $\eta = \eta_0 \sqrt{\xi}$; $\eta_0 = \frac{2\omega_0}{|\gamma|}$; $J_1(\eta), Y_1(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана индекса единица.

Продифференцируем по ξ решения (4). Поскольку [6]

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{\eta_0^2}{2\eta} \frac{d}{d\eta}; \quad \frac{d}{d\eta} [\eta J_1(\eta)] = \eta J_0(\eta); \quad \frac{d}{d\eta} [\eta Y_1(\eta)] = \eta Y_0(\eta);$$

$J_0(\eta), Y_0(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса, то:

$$\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{\eta_0^2}{2} J_0(\eta); \quad \frac{dx_2}{d\xi} = \frac{\eta_0^2}{2} Y_0(\eta). \quad (5)$$

Составленный из (4) и (5) определитель Вронского равен [6]:

$$\Delta = x_1 \frac{dx_2}{d\xi} - x_2 \frac{dx_1}{d\xi} = \frac{\eta_0^2 \eta}{2} [J_1(\eta) Y_0(\eta) - J_0(\eta) Y_1(\eta)] = \frac{\eta_0^2}{\pi}. \quad (6)$$

Решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$x = c_1(\eta) \cdot \eta J_1(\eta) + c_2(\eta) \cdot \eta Y_1(\eta), \quad (7)$$

где согласно методу вариации произвольных постоянных:

$$c_1(\eta) = -\frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta) x_2}{\Delta} d\eta; \quad c_2(\eta) = \frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta) x_1}{\Delta} d\eta; \quad (8)$$

$$f(\eta) = \frac{F \eta_0^2}{m_0 \gamma^2 \eta^2} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right].$$

Учитывая (4) и (6), интегралы (8) преобразуем к форме:

$$c_1(\eta) = -\frac{\pi \eta_0 F}{2c} \int_1^{\eta/\eta_0} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] Y_1(\eta_0 y) dy; \quad (9)$$

$$c_2(\eta) = \frac{\pi \eta_0 F}{2c} \int_1^{\eta/\eta_0} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] J_1(\eta_0 y) dy.$$

Переход через резонанс характеризуем коэффициентом динамичности

$$K_\delta = \frac{c}{F} \max x(\eta). \quad (10)$$

Поскольку цилиндрические функции могут быть выражены через амплитуду M_1 и фазу θ_1 по формулам [6]

$$J_1(\eta) = M_1(\eta) \cos \theta_1(\eta); \quad Y_1(\eta) = M_1(\eta) \sin \theta_1(\eta), \quad (11)$$

то, согласно (7), (9) и (10), коэффициент динамичности представляется выражением

$$K_\delta = \frac{\pi}{2} \eta_0 \eta \sqrt{a_1^2(\eta) + a_2^2(\eta)} \sqrt{J_1^2(\eta) + Y_1^2(\eta)},$$

в котором

$$a_1(\eta) = \int_1^{\eta/\eta_0} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] Y_1(\eta_0 y) dy; \quad a_2(\eta) = \int_1^{\eta/\eta_0} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] J_1(\eta_0 y) dy. \quad (12)$$

Интегралы (12) приходится вычислять на компьютере.

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим модельную задачу, когда масса осциллятора возрастает. Для этого примем следующие исходные данные:

$m_0 = 2$ кг; $c = 5000$ Н/м; $\frac{\omega}{\omega_0} = 0,5$ и разные значения γ . На рис.1 нанесены коэффициенты динамичности, отмеченные цифрами 1,2,3, которые соответствуют значениям $\gamma = 0,2; 0,4; 0,8$ с⁻¹.

то, согласно (7), (9) и (10), коэффициент динамичности представляется выражением

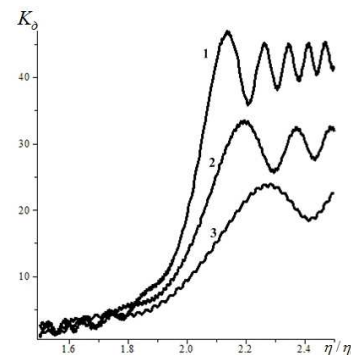


Рисунок 1 – Зависимость коэффициента динамичности K_δ от безразмерного параметра η/η_0 при возрастании массы

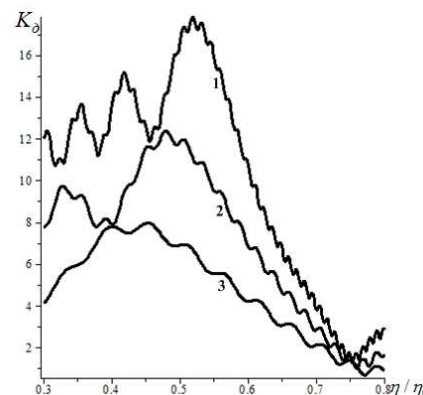


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента динамичности K_δ от безразмерного параметра η/η_0 при убывании массы

Для принятых исходных данных постоянная частота возмущающей силы ω совпадает со значением мгновенной частоты свободных колебаний осциллятора, когда $\eta/\eta_0 = 2$. Но максимальный K_δ достигается не при $\eta/\eta_0 = 2$, а при больших соотношениях η/η_0 , т.е. происходит смещение вправо положения резонанса. Величина смещения возрастает с увеличением γ , но при этом происходит уменьшение максимального K_δ , поскольку убыстряется прохождение области резонанса. После прохождения через резонанс начинаются биения. Исследование показало, что переход через параметрический резонанс в осцилляторе возрастающей массы качественно такой, как нестационарный резонанс в классическом осцилляторе при возрастающей частоте возмущающей силы [2-4].

Коэффициенты динамичности осциллятора убывающей массы представлены на рис. 2. Они получены при следующих исходных данных: $m_0 = 2$ кг;

$c = 1250$ Н/м; $\frac{\omega}{\omega_0} = 1,6$ и разных значениях γ . Цифрами 1,2,3 на рис. 2 отмечены графики K_δ , что соответствуют значениям $\gamma = -0,2; -0,4; -0,8$ с⁻¹.

Теперь равенство частот возмущающей силы и свободных колебаний осциллятора наступает при $\eta/\eta_0 = 0,625$. Но на рис. 2 положение максимальных K_δ (резонанса) смещено влево в сторону меньших отношений, чем 0,625. С увеличением $|\gamma|$ (скорости прохождения резонанса) уменьшаются резонансные η/η_0 и K_δ .

Картина прохождения через резонанс в осцилляторе убывающей массы качественно оказывается такой как в классическом линейном осцилляторе при уменьшении частоты возмущающей силы [2-4].

Выводы. Вследствие изменения массы осциллятора, он может попадать в область резонансных колебаний и при постоянной частоте возмущающей силы. Расчет амплитуд нестационарных резонансных колебаний сводится к интегралам, которые приходится вычислять на компьютере. Прохождение через резонанс в осцилляторе возрастающей массы аналогично нестационарному резонансу в осцилляторе

ляторе постійних параметрів под дією сили зростаючої частоти, а в осциляторі зменшувалої маси – аналогічно резонансу, викликаному дією сили зменшувалої частоти.

Список литературы: 1. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю.А. Митропольский. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 283 с. 2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. 3. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с. 4. Goloskokov E.G. EInstationäre Schwingungen mechanischer Systeme / E.G. Goloskokov, A.P. Filippov – Berlin, Academie-Verlag, 1971. 5. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях / Б.Г. Коренев. – М.: Гос. изд. физ-мат. лит, 1960. – 458 с. 6. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцию .04.13

УДК 534.1

Переход через резонанс в осциляторе линейно-переменной массы / **В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – № 29 (1072). – С. 121-125. – Бібліогр.: 6 назв. *ISSN 2079-0075*.

Показано, що в осциляторі змінної маси можуть виникнути резонансні коливання навіть при дії зовнішньої сили сталої амплітуди та частоти. Досліджено особливості такого резонансу.

Ключові слова: резонанс, осцилятор, перехід через резонанс, нестационарні коливання, змінна маса

An oscillator with variable mass resonant vibrations can occur even under the action of an external force of constant amplitude and frequency is shown. The features of such a resonance were considered.

Keywords: resonance, oscillator, transition through resonance, nonstationary oscillations, variable mass